ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2011
Institut National des Postes et Télécommunications
INPT

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2011

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **PSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice

On note I l'un des intervalle $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ et on considère l'équation différentielle

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0. \qquad (\mathcal{H})$$

1. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}^*$ pour que la fonction $t \longmapsto t^\alpha$ soit une solution sur I de $(\mathcal{H})$.
2. Déterminer $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$ soit solution sur I de $(\mathcal{H})$.
3. Préciser l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle $(\mathcal{H})$.
4. L'équation différentielle $(\mathcal{H})$ admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$ autres que la solution nulle ?
5. Déterminer $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$ soit solution sur I de l'équation différentielle $(\mathcal{L})$
$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (\mathcal{L})$$
6. Rappeler la structure de l'ensemble des solutions sur I de l'équation $(\mathcal{L})$ et le préciser.
7. Montrer que l'équation différentielle $(\mathcal{L})$ admet une unique solution développable en série entière au voisinage de 0 ; on précisera les coefficients de cette série entière ainsi que son rayon de convergence.
8. Montrer que l'équation différentielle $(\mathcal{L})$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et la préciser.

Problème

1ère partie

Formule sommatoire de Poisson

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que les applications $t \longmapsto t^2g(t)$ et $t \longmapsto t^2g'(t)$, définies sur $\mathbb{R}$, soient bornées à l'infini, ce qui revient à dire que

$$g(t) = \underset{t\to\pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \quad g'(t) = \underset{t\to\pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

On lui associe la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par

$$g_0(t) = g(t), \quad g_n(t) = g(t+2n\pi) + g(t-2n\pi) \quad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

1.1. Montrer que pour tout réel x, la fonction $t \longmapsto g(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par définition, la transformée de Fourier de g est la fonction notée $\widehat{g}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt}\, dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

1.2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

1.3. On note $\widetilde{g}$ la fonction définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $\widetilde{g}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$.

1.3.1. Montrer que la fonction $\widetilde{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1.3.2. Justifier que la fonction $\widetilde{g}$ est 2π-périodique et que ses coefficients de Fourier complexes sont donnés par

$$c_k(\widetilde{g}) = \frac{1}{2\pi}\widehat{g}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On remarquera que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{g}(t) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=-n}^{n} g(t + 2p\pi)$.

1.3.3. Montrer que les familles $\Big(g(2n\pi)\Big)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\Big(\widehat{g}(n)\Big)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont sommables et que leur sommes vérifient la relation suivante, dite formule sommatoire de Poisson,

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(2n\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n).$$

2ème partie
Application de la formule sommatoire de Poisson

Pour tout réel $\lambda > 0$, on note h_λ la fonction définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $h_\lambda(t) = e^{-\lambda^2 t^2}$.

2.1. Vérifier que, pour tout réel $\lambda > 0$, la fonction h_λ satisfait les hypothèses faites sur la fonction g dans la partie précédente.

Dans la suite, on notera $\widehat{h_\lambda}$ la transformée de Fourier de h_λ, $\lambda > 0$; on admettra que $\widehat{h_1}(0) = \sqrt{\pi}$.

2.2. Montrer que la fonction $\widehat{h_1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle satisfait l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{2}\, y = 0. \tag{1}$$

2.3. Résoudre l'équation différentielle (1) et donner l'expression de $\widehat{h_1}$.

2.4. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$ et tout réel x, $\widehat{h_\lambda}(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\lambda} e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2}}$.

2.5. Montrer, pour tout réel $a > 0$ la relation

$$\sqrt{a}\Big(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 a}\Big) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}. \tag{2}$$

3ème partie
Un exemple d'utilisation

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la fonction définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $u_n(z) = \exp(i\pi n^2 z)$, où $z \longmapsto \exp(z)$ désigne la fonction exponentielle complexe.

3.1. On pose $\Omega = \{z \in \mathbb{C},\ Im(z) > 0\}$. Montrer que Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{C}$.

3.2. Soit $z \in \mathbb{C}$; montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(z)$ converge si, et seulement si, $z \in \Omega$.

Dans la suite, on pose $u(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(z),\ z \in \Omega.$

3.3. Montrer que, pour tout $z \in \Omega$, $u(z+1) + u(z) = 2u(4z)$.

3.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$, on pose

$$\widetilde{u}_n(x, y) = u_n(x + iy) \quad \text{et} \quad \widetilde{u}(x, y) = u(x + iy).$$

3.4.1. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k \widetilde{u}_n$ converge normalement sur $\mathbb{R} \times [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

3.4.2. Montrer soigneusement que la fonction $\widetilde{u}$, définie ci-dessus, possède en tout point de $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x et exprimer $\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}(x, y)$, pour $(x, y) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$, sous la forme de la somme d'une série.

3.4.3. Montrer de même que la fonction $\widetilde{u}$ possède en tout point de $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à y et l'exprimer en fonction de $\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}$.

3.4.4. Montrer que la fonction u est holomorphe sur Ω.

3.5. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, on note $Arg(z)$ l'élément de l'intervalle $]-\pi, \pi[$ tel que $z = |z| \exp(iArg(z))$; on pose alors $\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + iArg(z)$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$z^\alpha = \exp\left(\alpha \mathrm{Log}(z)\right).$$

On rappelle que la fonction Log est le logarithme principal, et que les fonctions exp et Log sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ respectivement.

3.5.1. Justifier que la fonction $z \longmapsto z^\alpha$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

3.5.2. Partant de la formule (2) de la deuxième partie et moyennant un résultat à préciser sur les zéros d'une fonction holomorphe, montrer que pour tout $z \in \Omega$,

$$\left(\frac{i}{z}\right)^{1/2} \Big(1 + 2u(z)\Big) = 1 + 2u\Big(-\frac{1}{z}\Big).$$

3.5.3. En déduire que, pour tout $z \in \Omega$, $u(z+1) + \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{i}{z}\right)^{1/2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{-i\pi n^2}{4z}\right) - \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{z}\right)\right)$.

FIN DE L'ÉPREUVE